میان‌یاب های پیش‌نگر NURBS-PH برای فرز کاری سریع در کنترل عددی*

(یادداشت پژوهشی)

بهنام معتکف ایمانی[۱]   امیرمحمد قندهاریون[۲]

چکیده *روش‌های مختلف برای میان‌یابی پارامتری (Parametric Interpolation) بر روی منحنی‌های NURBS در گذشته پیشنهاد شده‌اند. اما در این روش‌ها، خطاهای ناشی از ماهیت تقریبی میان‌یاب NURBS، معمولاً در نظر گرفته نمی شوند. در این مقاله، یک الگوریتم ترکیبی پیش‌نگر (Look-Ahead) برای میان‌یابی بر روی منحنی‌های NURBS، ارایه شده است. این الگوریتم، میان‌یابی بر روی گوشه‌های تیز را توسط منحنی‌های هدوگراف فیثاغورثی (Pythagorean Hodograph) (PH) انجام می‌دهد. این کار باعث کاهش همزمان خطاهای هندسی و خطاهای ناشی از تقریب در میان‌یابی می‌شود. الگوریتم ارایه شده از چهار بخش تشکیل شده است: بخش تشخیص گوشه‌های تیز، بخش ایجاد منحنی PH، بخش ایجاد پروفیل سرعت و بخش تشخیص دینامیکی. شبیه‌سازی انجام شده، صحت الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد. آزمایش های انجام شده بر روی میز X-Y تأیید می‌کند که روش ارایه شده، دقت دنبال کردن مسیر را در مقایسه با الگوریتم های تعیین پیشروی بر مبنای خطای وتری (Adaptive-feedrate Algorithm) و تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا (Curvature-feedrate Algorithm) به صورت چشمگیری بهبود می‌بخشد.*

واژه‌های کلیدی کنترل عددی ، میان‌یاب پارامتری CNC، منحنی PH

Look-Ahead NURBS-PH Interpolators for High Speed CNC Milling

B. Moetakef Imani   A. Ghandehariun

Abstract *Various methods for parametric interpolation of NURBS curves have been proposed in the past. However, the errors caused by the approximate nature of the NURBS interpolator were rarely taken into account. This paper proposes an integrated look-ahead algorithm for parametric interpolation along NURBS curves. The algorithm interpolates the sharp corners on the curve with the Pythagorean-hodograph (PH) interpolation. This will minimize the geometric and interpolator approximation errors simultaneously. The algorithm consists of four different modules: a sharp corner detection module, a PH construction module, a feedrate planning module, and a dynamics module. Simulations are performed to show correctness of the proposed algorithm. Experiments on an X-Y table confirm that the developed method improves contour accuracy significantly compared to previously proposed adaptive-feedrate and curvature-feedrate algorithms.*

Key Words Numerical Control, CNC Parametric Interpolation, PH Curve

---

* نسخه‌ی نخست مقاله در تاریخ ۸۸/۱۲/۲ نسخه پذیرش آن در تاریخ ۹۰/۳/٤ و نسخه آماده چاپ آن در تاریخ ۹۰/۱۰/۳ به دفتر نشریه رسیده‌است.

(۱) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقدمه

وظیفه‌ی یک میان‌یاب در ماشین ابزار با کنترل عددی کامپیوتری (CNC) (Computer Numerical Control) تبدیل اطلاعات مربوط به مسیر ابزار و سرعت پیشروی به نقاط مرجع برای هر بازه‌ی نمونه گیری سیستم سروو است. کنترل حلقه بسته‌ی موقعیت و سرعت با مقایسه‌ی موقعیت واقعی ماشین، که توسط انکودرهای روی محور موتور تعیین می‌شود، با نقاط مرجع ممکن خواهد بود [1].

امروزه منحنی‌های پارامتری دارای کاربردهای فراوان در طراحی به کمک رایانه (CAD) (Computer-Aided Design) هستند که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به صنایع خودروسازی، صنایع هوا فضا و طراحی قالب اشاره کرد. منحنی‌های پارامتری دارای شکل‌های مختلفی هستند که مهم‌ترین آن‌ها منحنی Bezier، منحنی B-Spline، منحنی spline درجه‌ی سه و منحنی NURBS می‌باشند. از بین این منحنی‌ها، منحنی NURBS دارای محبوبیت بیشتری بوده و به‌عنوان یک منحنی استاندارد مورد استفاده قرار می‌گیرد [2]. ماشین‌های ابزار جدید با کنترل عددی رایانه‌ای، علاوه بر میان‌یابی خطی و دایروی، امکان میان‌یابی پارامتری را نیز فراهم نموده‌اند. تحقیقات انجام شده نشان داده است که میان‌یابی پارامتری باعث کاهش نوسان‌های سرعت پیشروی و خطاهای وتری و کوتاه شدن زمان ماشین‌کاری در مقایسه با میان‌یابی خطی و دایروی می‌شود [3].

تنظیم دقیق سرعت پیشروی به طور خاص در زمینه‌ی ماشین‌کاری سریع (High-Speed Machining) دارای اهمیت است؛ زیرا در این حالت مقادیر دامنه‌ی شتاب و مشتق شتاب (Jerk) بسیار زیاد خواهد بود. علاوه بر آن، ناتوانی میان‌یاب در حفظ سرعت پیشروی می‌تواند باعث ایجاد ارتعاشات خود برانگیخته در ابزار (Tool Chatter) یا شکست ابزار شود [4]. میان‌یاب‌های منحنی‌های B-Spline و یا NURBS معمولا بر مبنای بسط سری تیلور به‌دست می‌آیند. وظیفه‌ی اصلی این میان‌یاب‌ها محاسبه‌ی مقادیر پارامتر متناظر با نقاط مرجع متوالی است. استفاده از بسط سری تیلور، به دلیل حذف جملات با مرتبه‌ی بالا، باعث ایجاد خطای بریدگی در محاسبات می‌شود [4].

برای از بین بردن مشکل خطای بریدگی، می‌توان مسیر ابزار را توسط منحنی‌های هدوگراف فیثاغورثی (PH) توصیف کرد [5]. به دلیل ساختار جبری منحنی PH، امکان حل تحلیلی معادله‌ی انتگرالی میان‌یابی برای این منحنی فراهم است. بدین ترتیب می‌توان معادله‌ی میان‌یابی بر روی این منحنی را با دقت و انعطاف پذیری بالا برای حالات مختلف سرعت پیشروی ثابت یا متغیر به‌دست آورد [6].

روش‌های مختلف برای میان‌یابی بر روی منحنی‌های پارامتری ارایه شده است. یه و همکاران [7] یک میان‌یاب پارامتری با استفاده از بسط سری تیلور ارایه کردند. فروکی و همکاران [4] ضرایب بسط سری تیلور را برای سرعت پیشروی متغیر تا جمله‌ی مرتبه‌ی سوم به طور دقیق محاسبه کردند. تسای و همکاران [6] الگوریتمی برای میان‌یابی پارامتری بر روی منحنی PH با سرعت پیشروی متغیر با زمان پیشنهاد کردند. اما در این الگوریتم، روشی برای تغییر سرعت پیشروی بر مبنای خواص هندسی منحنی وجود ندارد. یه و همکاران [8] الگوریتم میان‌یابی با سرعت پیشروی متغیر را ارایه نمودند. در این الگوریتم سرعت پیشروی به‌گونه‌ای تغییر می‌کند که خطای وتری از حد مجاز آن تجاوز نکند. ژیمینگ و همکاران [9] الگوریتم تغییر سرعت پیشروی بر مبنای خواص هندسی منحنی را ارایه کردند. از آن‌جاکه در این الگوریتم‌ها تغییرات سرعت پیشروی مورد توجه قرار نگرفته‌است، تغییرات سریع در انحنای مسیر می‌تواند باعث افزایش بیش از حد شتاب و یا مشتق شتاب شود. تسای و همکاران [3] یک الگوریتم ترکیبی پیش‌نگر برای میان‌یابی بر روی منحنی NURBS ارایه کردند. این الگوریتم

خطاهای هندسی و خطاهای ناشی از دینامیک سیستم سروو را به طور همزمان مورد نظر قرار می‌دهد. اما خطاهای ناشی از ماهیت تقریبی میان‌یابی بر مبنای بسط سری تیلور در این الگوریتم مورد توجه قرار نگرفته‌است.

در این مقاله، یک الگوریتم میان‌یابی ترکیبی پیش‌نگر هدوگراف فیثاغورثی برای میان‌یابی بر روی منحنی‌های NURBS ارایه شده است. این الگوریتم از بخش‌های تشخیص گوشه‌های تیز، ایجاد منحنی PH، ایجاد پروفیل سرعت و تشخیص دینامیکی تشکیل شده است. در این الگوریتم، خطاهای وتری، نوسان‌های سرعت، خطاهای سیستم سروو و خطاهای ناشی از میان‌یابی بر روی گوشه‌های تیز مورد توجه قرار گرفته‌اند. به کمک الگوریتم ارایه شده، امکان ماشین کاری با سرعت پیشروی بالاتر همراه با دقت بیشتر در دنبال کردن مسیر و زمان ماشین‌کاری کمتر فراهم می‌شود. نتایج شبیه‌سازی و آزمایش‌های انجام شده عملکرد مناسب الگوریتم پیشنهادی را تأیید می‌کنند.

الگوریتم میان‌یابی منحنی NURBS

فرض می‌کنیم $C(u)$ نشان‌دهنده‌ی یک منحنی NURBS بوده و معادله‌ی آن به صورت زیر است [10]:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) P_i W_i}{\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) W_i}$$

(۱)

در معادله‌ی (۱)، P_i نشان‌دهنده‌ی نقاط کنترل، W_i وزن نقطه‌ی کنترل P_i، $n+1$ تعداد نقاط کنترل و p درجه‌ی منحنی NURBS است. $N_{i,p}(u)$ تابع پایه‌ی B-Spline است که توسط روابط بازگشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (۲)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

(۳)

در روابط بالا، $\{u_0, \ldots, u_{n+p+2}\}$ نشان‌دهنده‌ی بردار گرهی و u پارامتر میان‌یابی است.

برای انجام عملیات میان‌یابی بر روی منحنی NURBS، از بسط سری تیلور تا تقریب مرتبه‌ی دوم استفاده می‌شود. بدین ترتیب معادله‌ی میان‌یابی برای تعیین پارامترهای u_k مربوط به نقاط مرجع متوالی برای سیستم سروو به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{k+1} = u_k + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_k} \Delta t + \left.\frac{d^2u}{dt^2}\right|_{t=t_k} \frac{(\Delta t)^2}{2!}$$

(٤)

با جای‌گذاری مقادیر مشتقات در معادله‌ی (٤)، بسط سری تیلور به صورت زیر خواهد بود [4]:

$$u_{k+1} = u_k + \frac{V_k T_s}{|C'(u_k)|} + \frac{T_s^2}{2}\left\{\frac{A_k}{|C'(u_k)|} - \frac{V_k^2 [C'(u_k). C''(u_k)]}{|C'(u_k)|^4}\right\}$$

(٥)

در معادله‌ی (٥)، V_k، A_k، T_s، $C'(u_k)$ و $C''(u_k)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی سرعت پیشروی، شتاب، دوره‌ی نمونه‌گیری و مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم منحنی NURBS هستند. برای محاسبه‌ی مقادیر $C(u_k)$، $C'(u_k)$ و $C''(u_k)$ در حالت بلادرنگ (Real-time) می‌توان از الگوریتم دی بور استفاده کرد [3].

الگوریتم میان‌یابی هدوگراف فیثاغورثی

یک منحنی پارامتری PH چندجمله‌ای با پارامتر ξ به صورت $r(\xi) = (x(\xi), y(\xi))$ توسط مشتق پارامتری

هر کدام از مؤلفه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود [6]:

$$x'(\xi) = u^2(\xi) - v^2(\xi)$$
$$y'(\xi) = 2u(\xi)v(\xi) \qquad (٦)$$

با استفاده از این شکل، مؤلفه‌های $x'(\xi)$ و $y'(\xi)$ به صورت چندجمله‌ای‌هایی خواهند بود که در رابطه‌ی فیثاغورث صدق می‌کنند:

$$x'^2(\xi) + y'^2(\xi) = \sigma^2(\xi) \qquad (٧)$$

در رابطه‌ی (٧)،

$$\sigma(\xi) = |r'(\xi)| = u^2(\xi) + v^2(\xi) = \frac{ds}{d\xi} \qquad (٨)$$

نشان دهنده‌ی سرعت پارامتری بر روی $r(\xi)$ است. بدین ترتیب، با جایگزینی چندجمله‌ای‌های $u(\xi)$ و $v(\xi)$ در معادله‌ی (٦) و انتگرال‌گیری، مؤلفه‌های منحنی $r(\xi)$ به دست می‌آیند. منحنی PH درجه‌ی پنج با جایگزینی چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دوم برنشتاین به صورت

$$u(\xi) = u_0(1-\xi)^2 + 2u_1(1-\xi)\xi + u_2\xi^2$$
$$v(\xi) = v_0(1-\xi)^2 + 2v_1(1-\xi)\xi + v_2\xi^2 \qquad (٩)$$

در معادله‌ی (٦) و انتگرال‌گیری به‌دست می‌آید [6].

در این تحقیق برای تعیین معادله‌ی میان‌یابی، سرعت پیشروی به صورت تابعی از زمان تعریف می‌شود. در صورتی که تابع سرعت پیشروی بر حسب زمان به صورت $V(t)$و انتگرال نامعین آن $F(t)$ باشد، معادله‌ی میان‌یابی به حل معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$s(\xi) = F(t) \qquad (١٠)$$

در معادله‌ی (١٠)$s(\xi)$ تابع طول منحنی PH است [6]. برای هر بازه‌ی نمونه گیری Δt، میان‌یاب بلادرنگ کنترل عددی باید مقادیر پارامترهای $\xi_1, \xi_2, \ldots$ متناظر با نقاط مرجع در زمان‌های $\Delta t, 2\Delta t, \ldots$ را محاسبه کند. این مقادیر به‌صورت ریشه‌های معادلات چند جمله‌ای زیر به دست می‌آیند:

$$s(\xi_k) = F(k\Delta t) \text{for } k = 1, 2, \ldots \qquad (١١)$$

معادله‌ی (١١) را می‌توان با روش نیوتن- رافسون برای یافتن مقدار ξ_k به صورت:

$$\xi_k^{(r+1)} = \xi_k^{(r)} - \frac{s\left(\xi_k^{(r)}\right) - F(k\Delta t)}{\sigma\left(\xi_k^{(r)}\right)} \;;\; r = 0, 1, \ldots \qquad (١٢)$$

و با مقدار ابتدایی $\xi_k^{(0)} = \xi_{k-1}$ حل نمود.

الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای منحنی PH

معماری سیستم. در این قسمت، جزییات مربوط به الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH ارایه می‌شود. این الگوریتم به‌عنوان یک کنترل کننده‌ی عددی کامپیوتری عمل می‌کند و از سه برنامه‌ی اصلی تشکیل شده است: مترجم فرمان‌های CNC، ایجاد کننده‌ی نقاط مرجع و کنترل کننده‌ی حرکت. مترجم CNC فرمان‌های کنترل عددی را از فایل خوانده و به صورت بلوک‌های کنترل عددی در حافظه ذخیره می‌کند. ایجاد کننده‌ی نقاط مرجع، نقاط مرجع متوالی برای سیستم سروو را بر اساس الگوریتم ارایه شده ایجاد می‌کند. کنترل کننده‌ی حرکت نیز حرکت میز X-Y را بر اساس نقاط مرجع کنترل می‌کند.

الگوریتم ایجاد نقاط مرجع از چهار بخش اصلی تشکیل شده است: بخش تشخیص گوشه‌های تیز، بخش ایجاد منحنی PH، بخش ایجاد پروفیل سرعت با تغییرات شتاب محدود و بخش تشخیص دینامیکی. بخش تشخیص گوشه‌های تیز، با بررسی بلوک‌های NC پیش‌رو، گوشه‌های تیز منحنی را شناسایی می‌کند. پس از آن، با توجه به این گوشه‌های تیز، منحنی به

قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شود. وظیفه‌ی بخش ایجاد منحنی PH، تقریب گوشه‌های تیز منحنی اصلی با منحنی PH است. سپس طول هر قسمت از منحنی تعیین شده و در حافظه ذخیره می‌شود. بخش ایجاد پروفیل سرعت با استفاده از اطلاعات مربوط به قیدهای خطای وتری، سرعت پیشروی، شتاب و تغییرات شتاب، پروفیل سرعت مناسب را ایجاد می‌کند. برای آن‌که خطای دنبال کردن مسیر از حد مجاز آن فراتر نرود، بخش تشخیص دینامیکی پروفیل سرعت را دوباره اصلاح می‌کند. در پایان، کنترل‌کننده‌ی حرکت، موقعیت میز X-Y را به‌صورت بلادرنگ کنترل می‌کند. الگوریتم‌های مربوط به هر بخش در قسمت‌های بعدی توضیح داده شده‌اند.

بخش تشخیص گوشه‌های تیز. بخش تشخیص گوشه‌های تیز دارای اهمیت فراوانی در الگوریتم پیش‌نگر است. در این مقاله، منظور از گوشه‌ی تیز محدوده‌ای است که در آن خطای دنبال کردن مسیر نسبت به سرعت پیشروی حساسیت زیادی دارد. بدین ترتیب، برای دنبال کردن مسیر با دقت مناسب باید سرعت پیشروی در این محدوده کاهش یابد. هم‌چنین نوسان‌های سرعت پیشروی در این محدوده باید کمینه شود. بدین منظور، این محدوده از منحنی با منحنی PH، که برای آن میان‌یابی دقیق امکان‌پذیر است، جایگزین می‌شود. دو شرط برای تعیین گوشه‌ی تیز قابل استفاده است. شرط اول آن است که مشتق انحنا در گوشه‌ی تیز برابر صفر شود.؛ به عبارت ریاضی:

$$\left.\frac{d\kappa(u)}{du}\right|_{u=u_k} = 0 \qquad (۱۳)$$

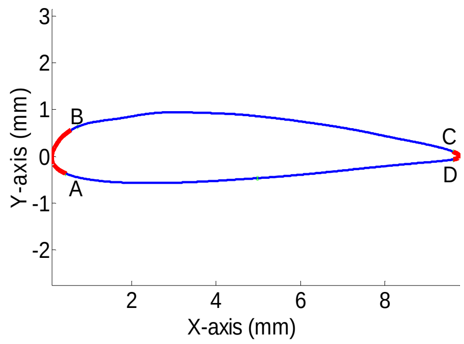
در رابطه‌ی (۱۳)، $\kappa(u)$ نشان دهنده‌ی انحنا بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa(u) = \frac{\left|\frac{dC}{du} \times \frac{d^2C}{du^2}\right|}{\left|\frac{dC}{du}\right|^3} \qquad (۱۴)$$

استفاده از شرط اول به‌تنهایی در تعیین گوشه‌های تیز منحنی کافی نیست؛ زیرا در این شرط اثرات مربوط به سرعت پیشروی در نظر گرفته نشده است [3]. بدین منظور، برای اضافه کردن اثرات پیشروی، از شرط دوم به‌صورت زیر استفاده می‌شود. بر مبنای این شرط، برای در نظر گرفتن یک منطقه از منحنی به عنوان گوشه‌ی تیز باید انحنا در آن از مقدار مرزی κ_{th} فراتر رود. این مقدار مرزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa_{th} = \frac{A_{max}}{V_{max}^2} \qquad (۱۵)$$

در رابطه‌ی (۱۵)، A_{max} حد بیشینه‌ی شتاب و V_{max} سرعت پیشروی ورودی در بلوک کنترل عددی است. به‌عبارت دیگر، شرط دوم این موضوع را بررسی می‌کند که آیا شتاب گریز از مرکز در نقاط بیشینه یا کمینه‌ی نسبی از حد بیشینه‌ی شتاب فراتر رفته است [3]. ناحیه‌ای از منحنی که این شرط در مورد آن صدق می‌کند به عنوان ناحیه‌ی گوشه‌ی تیز شناخته می‌شود و با یک منحنی PH جایگزین می‌شود. بدین ترتیب کنترل سرعت پیشروی بر روی این ناحیه با دقت بیشتر ممکن خواهد بود. اثر اعمال دو شرط ارایه شده را می‌توان در شکل (۱) مشاهده کرد که در آن قسمت‌های AB و CD به عنوان گوشه‌های تیز انتخاب شده‌اند.



شکل ۱ منحنی NURBS مربوط به پروفیل ایرفویل NACA2415 [11]

بخش ایجاد منحنی PH. استفاده از سری تیلور در میان‌یابی روی منحنی NURBS به طور اجتناب ناپذیر باعث ایجاد خطای میان‌یابی و نوسان‌های ناخواسته در سرعت پیشروی می‌شود. این نوسان‌های ناخواسته موجب کاهش دقت دنبال کردن مسیر و کیفیت سطح خواهد شد. اما منحنی‌های PH امکان حل تحلیلی معادله‌ی انتگرالی میان‌یابی را فراهم می‌کنند که نتیجه‌ی آن، به دست آمدن معادله‌ی میان‌یابی به صورت دقیق می‌باشد [6]. بدین ترتیب، تقریب گوشه‌های تیز منحنی NURBS با منحنی‌های PH موجب کاهش نوسان‌های سرعت پیشروی خواهد شد.

به منظور تقریب یک ناحیه از منحنی NURBS با یک منحنی PH درجه پنج، اطلاعات هرمیت مرتبه‌ی اول مربوط به ناحیه (موقعیت و شیب در نقاط ابتدا و انتها) باید تعیین شوند. به کمک نمایش مختلط یک منحنی PH دو بعدی [12]،

$$r(\xi) = x(\xi) + iy(\xi)$$

(۱۶)

که در آن ξ پارامتر حقیقی است، چند جمله‌ای مختلط به صورت $w(\xi) = u(\xi) + iv(\xi)$ به گونه‌ای تعریف می‌شود که:

$$r'(\xi) = w^2(\xi)$$

(۱۷)

درصورتی‌که r_0، r_1، d_0 و d_1 به ترتیب نمایش مختلط نقطه ی ابتدا، نقطه ی انتها، شیب ابتدا و شیب انتها در منحنی PH باشند، $w(\xi)$ به کمک شکل برنشتاین به صورت زیر تعریف می‌شود [12]:

$$w(\xi) = w_0(1-\xi)^2 + 2w_1(1-\xi)\xi + w_2\xi^2$$

(۱۸)

که در آن:

$$w_0 = \pm\sqrt{d_0}$$

(۱۹)

$$w_2 = \pm\sqrt{d_1}$$

(۲۰)

$$w_1 = \frac{1}{4}\left[-3(w_0 + w_2) \pm \sqrt{120(r_1 - r_0) - 15w_0^2 - 15w_2^2 + 10w_0w_2}\right]$$

(۲۱)

منحنی PH بر روی گوشه‌ی تیز باید به گونه‌ای ایجاد شود که میزان خطا بین منحنی ایجاد شده و منحنی NURBS اصلی محدود باشد. بدین منظور، این بخش از الگوریتم مقدار جذر میانگین مربعات خطا بین دو منحنی را محاسبه می‌کند. در صورتی که این مقدار از حد مشخص شده برای آن فراتر رود، ناحیه‌ی گوشه‌ی تیز بر روی منحنی اصلی به دو قسمت تقسیم شده و یک منحنی PH بر روی هر قسمت ایجاد می‌شود. این روند آن قدر ادامه می‌یابد تا مقدار خطا در محدوده‌ی مجاز قرار گیرد. این الگوریتم بر روی ایرفویل شکل (۱) با مقدار مجاز جذر میانگین مربعات برابر $e = 1\ \mu m$ پیاده‌سازی شده است. در جدول (۱) اثر تقسیم کردن ناحیه‌ی گوشه‌ی تیز بر روی خطا بین منحنی اصلی و منحنی PH ایجاد شده مشاهده می‌شود.

جدول ۱ مقایسه‌ی خطا در ایجاد منحنی PH بر روی پروفیل ایرفویل

ناحیه‌ی منحنی	خطا (µm)			
	بدون تقسیم ناحیه		با تقسیم ناحیه	
	جذر میانگین مربعات	Max	جذر میانگین مربعات	Max
AB	4.9094	13.41	0.5205	1.44
CD	4.3893	9.79	0.5562	1.46

بخش ایجاد پروفیل سرعت. اولین وظیفه‌ی بخش ایجاد پروفیل سرعت، تعیین سرعت پیشروی بر روی گوشه‌های تیز است. برای این موضوع، دو روش تعیین پروفیل سرعت برای محدود کردن خطای وتری [8] و تعیین پروفیل سرعت بر مبنای انحنا [9] با یکدیگر ترکیب می‌شوند. برای تعیین سرعت پیشروی بر روی

گوشه‌ها از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود:

$$V_{sp}(u_k) = \min\{V_{af}(u_k), V_{cf}(u_k)\}$$

(۲۲)

در رابطه‌ی (۲۲)، مقادیر $V_{af}(u_k)$ و $V_{cf}(u_k)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$V_{af}(u_k) = \frac{2}{T_s}\sqrt{\frac{2\delta}{\kappa(u_k)} - \delta^2}$$

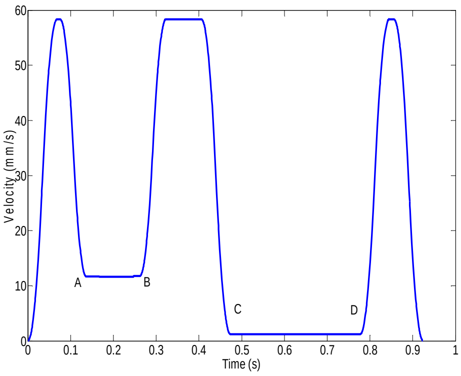
(۲۳)

$$V_{cf}(u_k) = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa(u_k) + \bar{\kappa}} V_{max}$$

(۲٤)

در روابط (۲٤ و ۲۳)، V_{af}، V_{cf} و V_{max} به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی سرعت پیشروی بر مبنای خطای وتری، سرعت پیشروی بر مبنای انحنا و سرعت پیشروی ورودی هستند. δ و κ نمایانگر تلرانس وتری و انحنای منحنی NURBS هستند. $\bar{\kappa}$ برای حفظ پیوستگی مشتق در معادله‌ی پیشروی بر مبنای انحنا وارد شده است.

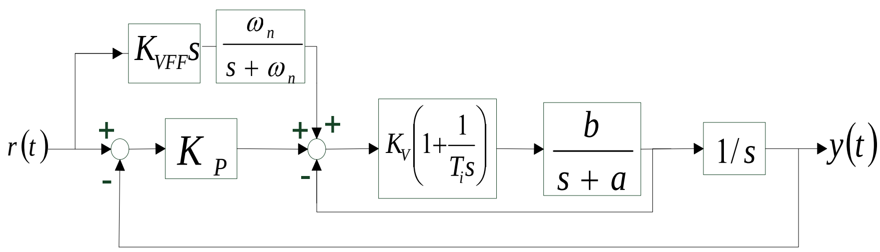
پس از محاسبه‌ی سرعت پیشروی بر روی گوشه‌های تیز، وظیفه‌ی دوم بخش ایجاد پروفیل سرعت، تعیین پروفیل سرعت بر روی هر قسمت از منحنی با در نظر گرفتن قیدهای سرعت پیشروی، شتاب و تغییرات شتاب است. الگوریتم پیشنهادی با استفاده از مقادیر طول هر قسمت از منحنی، سرعت پیشروی بر روی گوشه‌ها، سرعت پیشروی بیشینه، شتاب بیشینه و حد تغییرات شتاب، پروفیل سرعت زنگی شکل (Bell-Shape) [13] را ایجاد می‌کند. با عمل بخش های تعیین گوشه‌های تیز، ایجاد منحنی PH و ایجاد پروفیل سرعت، پروفیل سرعت ایرفویل به صورت شکل (۲) به‌دست می‌آید. در این‌جا، بیشینه‌ی سرعت پیشروی، بیشینه‌ی شتاب و حد تغییرات شتاب به‌ترتیب برابر 3500 mm/min، 2450 mm/s^2 و 50 000 mm/s^3 قرار داده شده‌اند [3].



شکل ۲ پروفیل سرعت پیشروی بر روی ایرفویل پس از عمل بخش‌های تعیین گوشه‌های تیز، ایجاد منحنی PH و ایجاد پروفیل سرعت

بخش تشخیص دینامیکی. عمل سه بخش اول، الزاما باعث رعایت قید بیشینه‌ی خطای دنبال کردن مسیر نمی‌شود؛ زیرا در این بخش‌ها خطای دنبال کردن مسیر مورد نظر قرار نگرفته است.

برای پیش‌بینی خطای دنبال کردن مسیر، سیستم کنترل سروو برای هر محور باید مدل‌سازی و شبیه‌سازی شود. بلوک دیاگرام شکل (۳) به عنوان مدل دینامیکی سیستم کنترل سروو در نظر گرفته شده است.



شکل۳ بلوک دیاگرام سیستم کنترل سروو [3]

تابع تبدیل حلقه بسته‌ی سیستم کنترل سروو (شکل ۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (۲۵)$$

پارامترهای معادله‌ی (۲۵) در جدول (۲) مشخص شده‌اند.

جدول۲ پارامترهای تابع تبدیل سیستم کنترل سروو [3]

پارامتر	محور x	محور y
a_0	1.938×10^9	1.904×10^9
a_1	3.538×10^7	3.496×10^7
a_2	2.135×10^5	2.120×10^5
a_3	6.984×10^2	6.948×10^2
a_4	1.00	1.00
b_0	1.938×10^9	1.904×10^9
b_1	3.476×10^7	3.435×10^7
b_2	1.471×10^5	1.466×10^5

با توجه به معادله‌ی (۲۵)، تابع تبدیل بین خطا روی هر محور $E(s)$ و سرعت روی هر محور $V(s)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (۲۶)$$

$$v(t) = {dr}/{dt} \Rightarrow V(s) = sR(s) - R(0) \quad (۲۷)$$

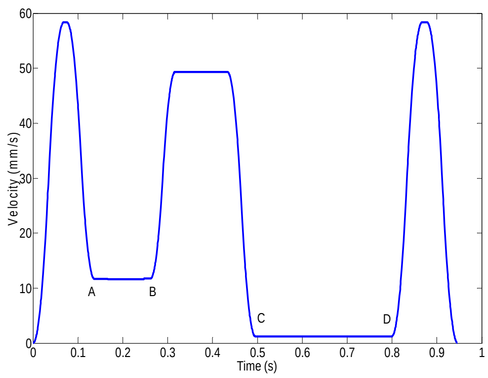
$$\Rightarrow \frac{E(s)}{V(s)} = \frac{a_4 s^4 + a_3 s^3 + (a_2 - b_2)s^2 + (a_1 - b_1)s + (a_0 - b_0)}{a_4 s^5 + a_3 s^4 + a_2 s^3 + a_1 s^2 + a_0 s} \quad (۲۸)$$

با محاسبه‌ی خطا روی هر محور، خطای دنبال کردن مسیر به‌صورت زیر حاصل می‌شود [3]:

$$\varepsilon_e = -E_x \sin\phi + E_y \cos\phi \quad (۲۹)$$

در رابطه‌ی (۲۹)، E_x و E_y به‌ترتیب خطا روی محور x و محور y هستند. ϕ زاویه‌ی بین مماس بر مسیر ابزار و محور x می‌باشد.

بخش تشخیص دینامیکی از معادلات (۲۹ و ۲۸) برای محاسبه‌ی خطای دنبال کردن مسیر استفاده می‌کند. در صورتی که خطای دنبال کردن مسیر ε_e از حد بیشینه‌ی خطای دنبال کردن مسیر ε_{max} بیشتر باشد، عملیات محاسباتی متوقف شده و مقدار سرعت پیشروی در آن لحظه $V(u_k)$ ذخیره می‌شود. سپس در حالی که مقدار بیشینه‌ی سرعت پیشروی برابر $V(u_k)$ قرار داده شده، پروفیل سرعت دوباره ایجاد می‌گردد. این روند آن‌قدر ادامه می‌یابد تا مقدار خطای دنبال کردن مسیر در محدوده‌ی مجاز قرار گیرد. در شکل (٤) پروفیل سرعت بر روی ایرفویل که به کمک الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH به‌دست آمده است، مشاهده می‌شود. همان‌طور که در این شکل مشخص است، بیشینه‌ی سرعت پیشروی بر روی قسمت BC از منحنی در مقایسه با شکل (۲) کاهش یافته است تا مقدار خطای دنبال کردن مسیر در این محدوده از حد مجاز آن تجاوز نکند.



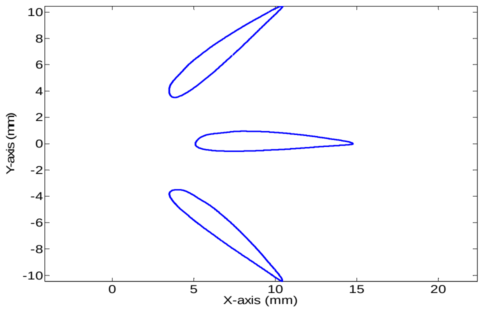
شکل٤ پروفیل سرعت پیشروی بر روی ایرفویل با استفاده از الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH

شبیه‌سازی عددی و انجام آزمایش

در این قسمت، شبیه‌سازی عددی و آزمایش برای پروفیل ایرفویل در سه زاویه‌ی 0°، 45° و 45°− مطابق شکل (۵) انجام می‌شود. با توجه به متفاوت بودن پارامترهای دینامیکی سیستم بر روی دو محور x و y، پاسخ دینامیکی سیستم برای هر یک از سه جهت مورد بررسی متفاوت خواهد بود. بنابراین با شبیه‌سازی و آزمایش الگوریتم برای پروفیل در جهت‌های مختلف، امکان بررسی عملکرد الگوریتم پیشنهادی برای پاسخ‌های دینامیکی متفاوت سیستم فراهم می‌شود. پارامترهای ورودی الگوریتم میان‌یابی برای شبیه‌سازی و انجام آزمایش مطابق جدول (۳) انتخاب می‌شوند. این پارامترها به صورت نمونه برای انجام عملیات ماشین‌کاری سریع با دقت بسیار بالا انتخاب شده‌اند.

شبیه‌سازی عددی. برای مقایسه‌ی عملکرد سه الگوریتم تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری [8]، تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا [9] و پیش‌نگر بر مبنای PH، شبیه‌سازی عددی انجام می‌شود. سیستم کنترل سروو مطابق شکل (۳) برای تعیین مقدار خطا در شبیه‌سازی به کار می‌رود. عملکرد این سه الگوریتم میان‌یابی در جدول (٤) مشاهده می‌شود.

با توجه به جدول (٤) مشخص است که خطا در الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH بسیار کمتر از دو الگوریتم دیگر است. این الگوریتم با تعیین گوشه‌های تیز و کاهش سرعت در این محدوده‌ها، خطای میان‌یابی را به صورت قابل توجه کاهش می‌دهد. همچنین این الگوریتم با پیش‌بینی دینامیک سیستم، پروفیل سرعت را برای دستیابی به حد مطلوب خطای دنبال کردن مسیر اصلاح می‌کند.



شکل۵ منحنی ایرفویل در سه زاویه برای شبیه‌سازی عددی و انجام آزمایش

جدول۳ پارامترهای ورودی الگوریتم میان‌یاب برای شبیه‌سازی عددی و انجام آزمایش

سرعت پیشروی بیشینه	V_{max}	3500 mm/min
شتاب بیشینه	A_{max}	2450 mm/s^2
تغییرات شتاب بیشینه	J_{max}	$5 \times 10^4 mm/s^3$
حد خطای وتری	δ	1μm
انحنای مرجع	$\bar{\kappa}$	1 mm^{-1}
حد خطای دنبال کردن مسیر	ε_{max}	15 μm
حد خطای تقریب منحنی PH	e	1 μm

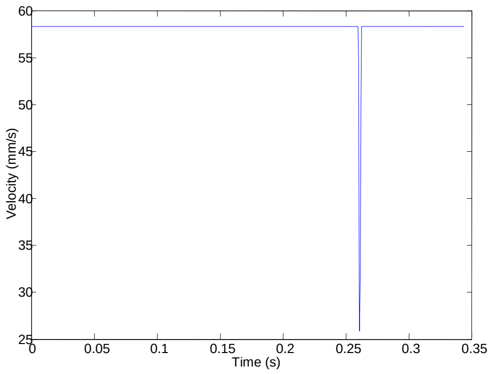
جدول٤ مقایسه‌ی عملکرد الگوریتم‌های میان‌یابی

الگوریتم میان‌یابی			تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری	تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا	پیش‌نگر بر مبنای PH
خطای روی هر محور (μm)	محور x	Max	358.69	195.78	57.97
		جذر میانگین مربعات	75.65	41.53	20.30
	محور y	Max	132.56	22.65	13.98
		جذر میانگین مربعات	27.31	8.39	3.56
خطای دنبال کردن مسیر (μm)		Max	142.79	47.02	14.11
		جذر میانگین مربعات	35.14	12.98	3.84
		Mean	16.780	8.50	2.31
زمان (s)			0.3440	0.4535	0.9455

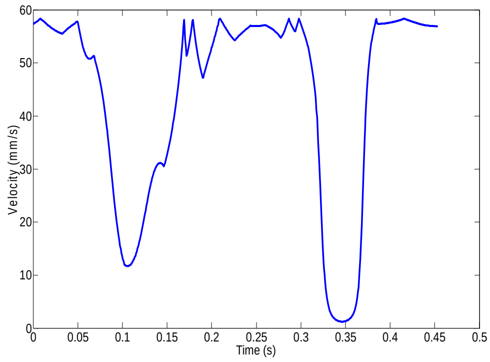
در شکل (٦) پروفیل سرعت پیشروی در سه الگوریتم مورد بررسی، مقایسه شده است. واضح است که الگوریتم پیشنهادی پیش‌نگر بر مبنای PH به دلیل قابلیت پیش‌بینی منحنی، امکان ایجاد پروفیل سرعت بسیار هموارتری نسبت به دو الگوریتم دیگر را فراهم می‌کند. درحالی‌که الگوریتم‌های تعیین سرعت پیشروی با خطای وتری محدود و تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا، امکان پیش‌بینی مناطق حساس در مسیر را ندارند و درنتیجه، سرعت پیشروی را به طور ناگهانی تغییر می‌دهند. بنابراین در این الگوریتم‌ها پروفیل سرعت به اندازه‌ی کافی هموار نیست.

در شکل (٧) خطای دنبال کردن مسیر در سه الگوریتم میان‌یابی مورد بررسی، مشاهده می‌شود. خطای دنبال کردن مسیر در الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH بسیار کمتر از دو الگوریتم دیگر است. زیرا در دو الگوریتم تعیین سرعت پیشروی با خطای وتری محدود و تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا، هیچ قیدی در مورد خطای دنبال کردن مسیر وجود ندارد؛ درحالی‌که در الگوریتم پیشنهادی پاسخ دینامیکی سیستم شبیه‌سازی شده و خطای دنبال کردن مسیر پیش‌بینی می‌شود. در صورتی که این خطا از محدوده‌ی مجاز خارج شود، پروفیل سرعت پیشروی اصلاح می‌شود. الگوریتم ارایه شده، سرعت پیشروی در ناحیه‌ی BC را کاهش می‌دهد تا خطای دنبال کردن مسیر در این ناحیه از حد مجاز آن (15 µm) فراتر نرود.

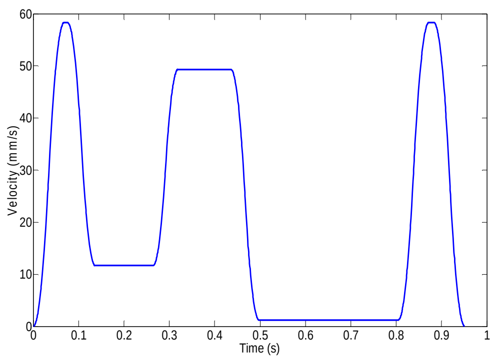
نتایج شبیه‌سازی عددی پروفیل ایرفویل در سه زاویه‌ی مختلف در جدول (٥) ارایه شده است. مشاهده می‌شود که با وجود آن که خطای روی هر محور در پیمودن مسیر ایرفویل در زوایای مختلف متفاوت است، خطای دنبال کردن مسیر تقریبا یکسان می‌باشد.با توجه به نتایج ارایه شده در جدول مشخص است که الگوریتم پیشنهادی پیش‌نگر بر مبنای PH در هر حالت مانع از افزایش خطای دنبال کردن مسیر به خارج از محدوده‌ی مجاز می‌شود.



(الف)

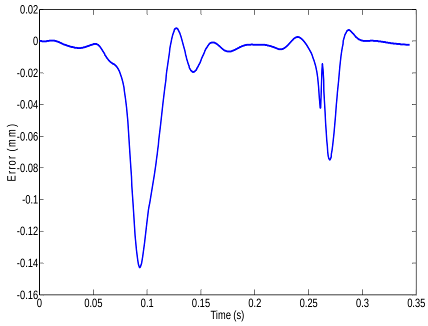


(ب)

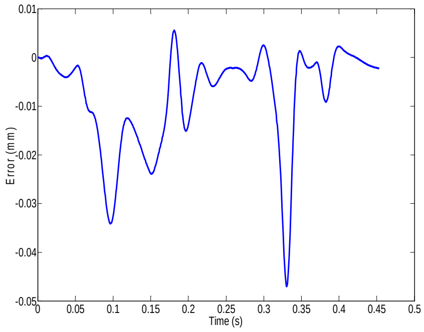


(پ)

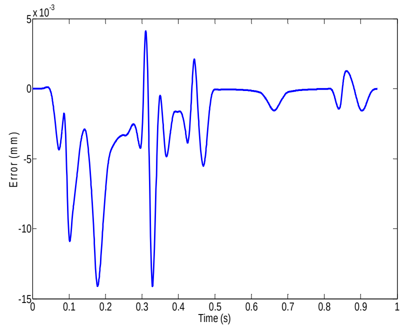
شکل٦ مقایسه‌ی پروفیل سرعت: (الف) الگوریتم تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری؛ (ب) الگوریتم تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا؛ (پ) الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH



(الف)



(ب)



(پ)

شکل۷ مقایسه‌ی خطای دنبال کردن مسیر: (الف) الگوریتم تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری؛ (ب) الگوریتم تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا؛ (پ) الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH

انجام آزمایش. آزمایش الگوریتم‌ها بر روی یک میز X-Y انجام می‌شود که حرکت آن توسط دو سروو موتورAC تأمین می‌شود (شکل ۸). دقت انکودر موتورها برابر 2500 pulse/rev است. الگوریتم بر روی رایانه پیاده‌سازی شده و ارتباط با موتورها توسط یک کارت کنترل حرکت ایجاد می‌شود. برای کنترل حرکت موتورها از حالت میان‌یابی شکل بیتی (Bit-Pattern Interpolation) [14] استفاده می‌شود. دو خط‌کش دیجیتال با دقت 1 µm بر روی میز نصب شده است که برای اندازه‌گیری خطا به کار می‌رود. الگوریتم‌های میان‌یابی توسط نرم‌افزارهای MATLAB و Visual Basic.NET بر روی رایانه پیاده‌سازی می‌شوند. مشخصات سخت‌افزار آزمایش در جدول (٦) مشخص شده است.

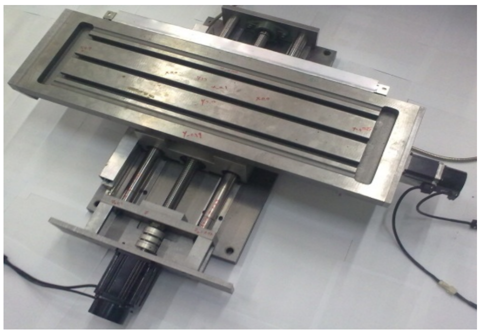
منحنی‌های ایروفیل مطابق شکل (۵) با سرعت پیشروی ورودی 3500 mm/min مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. خطای دنبال‌کردن مسیر در الگوریتم تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری [8]، الگوریتم تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا [9] و الگوریتم ارایه شده در شکل (۹)، آمده است. واضح است که الگوریتم پیشنهادی دقت دنبال کردن مسیر را به‌خصوص بر روی گوشه‌های تیز، به‌طور چشمگیر افزایش می‌دهد.

جدول۵ شبیه‌سازی عددی منحنی ایرفویل در سه زاویه‌ی مختلف

زاویه‌ی منحنی ایرفویل			45°	-45°	0°
خطای روی هر محور (µm)	محور x	بیشینه	38.71	43.51	57.97
		جذر میانگین مربعات	14.19	14.93	20.30
	محور y	بیشینه	43.66	38.85	13.98
		جذر میانگین مربعات	14.99	14.24	3.56
خطای دنبال کردن مسیر (µm)		بیشینه	14.12	14.12	14.11
		جذر میانگین مربعات	3.84	3.84	3.84
		کمینه	2.31	2.31	2.31

نتیجه گیری

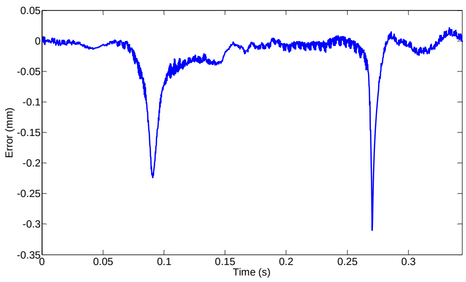
در این مقاله، یک الگوریتم جدید میان‌یابی ترکیبی NURBS و PH ارایه شده است. گوشه‌های تیز منحنی به کمک دو شرط مربوط به مشتق انحنا و سرعت پیشروی تعیین می‌شوند. سپس، برای کاهش نوسان‌های ناخواسته‌ی سرعت، یک منحنی PH بر روی گوشه ایجاد می‌شود. خطای بین منحنی ایجاد شده و منحنی NURBS اصلی از محدوده‌ی مجاز آن تجاوز نمی‌کند. پس از آن منحنی به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم شده و پروفیل سرعت هموار با مشتق شتاب محدود بر روی هر قسمت ایجاد می‌شود. بخش تشخیص دینامیکی برای محدود کردن خطای دنبال کردن مسیر، دوباره پروفیل سرعت را اصلاح می‌کند. شبیه‌سازی عددی، صحت عملکرد الگوریتم ارایه شده را تأیید می‌کند. آزمایش‌های انجام شده نشان می‌دهد که الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH، دقت دنبال کردن مسیر را، در مقایسه با الگوریتم‌های میان‌یابی تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری و تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا، به صورت چشمگیری افزایش می‌دهد. این تحقیق، کارایی الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH را نشان می‌دهد.



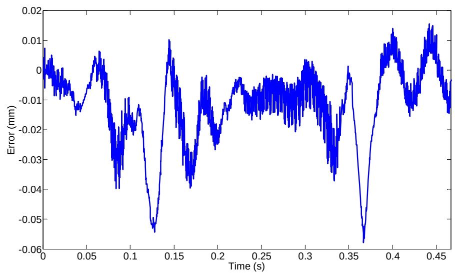
شکل۸ سخت‌افزار مورد استفاده در آزمایش

جدول٦ مشخصات سخت‌افزار مورد استفاده در آزمایش

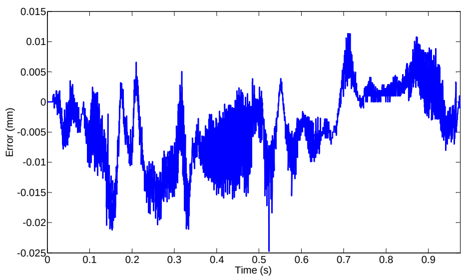
درایو سروو	TECO TSTA-20C AC Servo Drive
موتورهای سروو	TECO TST0640 and TSB0845 AC Servo Motor
کنترل حرکت	ADVANTECH PCI-1240 Motion Control Card
خطکش دیجیتال	CARMAR Linear Scales



(الف)



(ب)



(پ)

شکل۹ مقایسه‌ی خطای دنبال کردن مسیر در آزمایش الگوریتم‌های میان‌یابی: (الف) الگوریتم تعیین سرعت پیشروی برای محدود کردن خطای وتری؛ (ب) الگوریتم تعیین سرعت پیشروی بر مبنای انحنا؛ (پ) الگوریتم پیش‌نگر بر مبنای PH

مراجع

1. Farouki, R. T.," *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable"*, Springer, (2008).
2. Liu, X., Ahmad, F., Yamazaki, K. and Mori, M., "Adaptive interpolation scheme for NURBS curves

with the integration of machining dynamics", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol. 45, pp. 433-444, (2008).

3. Tsai, M.S., Nien, H.W. and Yau, H.T., "Development of an integrated look-ahead dynamics-based NURBS interpolator for high precision machinery", *Computer-Aided Design*, Vol. 40, pp. 554-566, (2008).
4. Farouki, R.T., and Tsai, Y.F., "Exact Taylor series coefficients for variable-feedrate CNC curve interpolators", *Computer-Aided Design*, Vol. 33, pp. 155-165, (2001).
5. Farouki, R.T. and Sakkalis, T., "Pythagorean hodographs", *IBM Journal of Research and Development*, Vol. 34, pp. 736-752, (1990).
6. Tsai, Y.F., Farouki, R.T. and Feldman, B., "Performance analysis of CNC interpolators for time-dependent feedrates along PH curves", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, pp. 245-265, (2001).
7. Yeh, S.S. and Hsu, P.L., "The speed-controlled interpolator for machining parametric curves", *Computer-Aided Design*, Vol. 31, pp. 349-357, (1999).
8. Yeh, S.S. and Hsu, P.L., "Adaptive-feedrate interpolation for parametric curves with a confined chord error", *Computer-Aided Design*, Vol. 34, pp. 229-237, (2002).
9. Zhiming, X., Jincheng, C. and Zhengjin, F., "Performance evaluation of a real-time interpolation algorithm for NURBS curves", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 20, pp. 270-276, (2002).
10. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*.2nd Ed., Springer, New York, (1997).
11. Jacobs, E.N., Ward K.E. and Pinkerton R.M., "The characteristics of 78 related airfoil sections from tests in the variable-density wind tunnel", U. S. Govt. print. off. cover-title, p. 58, (1939).
12. Moon, H.P., Farouki, R.T. and Choi, H.I., "Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 18, pp. 93-115, (2001).
13. Cheng, C.W. and Tsai, M.C., "Real-time variable feed rate NURBS curve interpolator for CNC machining", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol. 23, pp. 865-873, (2004).
14. Advantech Co., Ltd., PCI-1240 4-Axis Stepping/Pulse-type Servo Motor Control Card User’s Manual, (2001).